Synoptisk sammenstilling af Lemaîtres artikler

Fransk original fra 1927, engelsk oversættelse fra 1931

Lemaîtres artikel kan betegnes som *Big Bang*-teoriens fødselsattest. Artiklen er klemt inde mellem er lærd afhandling om en græsk tekst og en ny rækkeudvikling for tallet π. Den ville i øvrigt straks give Lemaître adgang til *Foreningen for semikolons bevarelse*.

Ved sammenstillingen herunder har jeg forsøgt at bibeholde den oprindelige ortografi mest muligt, dog med følgende afvigelser: Fysiske størrelser kursiveres konsekvent og fodnoter i den franske version konverteres til indskudt tekst sat med en grå font. Skrivemåden ”$8{,}5\times10^{28}$” er ændret til ”$8.5\cdot10^{28}$” og enheder angives ikke med forkortelsespunktum: ”km./sec.” er ændret til ”km/sec”. I den franske original er udtrykket for ρ ikke oplyst i dee unummererede ligninger mellem (12) og (13). I den engelske oversættelse har jeg med rød skrift (orange for fodnoter) tilføjet de dele, som blev udeladt fra den franske original. Afsnitsinddelingen i de to artikler udviser små forskelle; jeg har rettet til for at bevare den synoptiske opstilling.

Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques.

Note de M. l'Abbé G. Lemaître

Annales de la Société scientifique de Bruxelles, Série A, **47**, 49-59.

1. Généralités.

La théorie de la relativité fait prévoir l'existance d'un univers homogène où non seulement la répartition de la matière est uniforme, mais où toutes les positions de l'espace sont équivalentes, il n'y a pas de centre de gravité. Le rayon R de l'espace est constant, l'espace est elliptique de courbure positive uniforme $1/R^2$, les droites issues d'un même point repassent à leur point de d'épart après un parcours égal à πR,

A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulæ.

By Abbé G. Lemaître

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, March 1931, **91**, 483-490.

(*Translated by permission from ”Annales de la Société scientifique de Bruxelles”, Tome XLVII, série A, première partie.*)

1. *Introduction.*

According to the theory of relativity a homogeneous universe may exist such that all positions in space are completely equivalent; there is no centre of gravity. The radius of space R is constant; space is elliptic, *i.e.* of uniform positive curvature $1/R^2$; straight lines starting from a point come back to their origin after having travelled a path of length πR; the volume of space has a finite value π^2R^3; straight le volume totale de l'espace est fini et égal à $\pi^2 R^3$, les droites sont des lignes fermées parcourant tout l'espace sans rencontrer de frontière ([1] Nous considérons l'espace simplement elliptique, c'est-à-dire sans antipodes.)

Deux solution ont été proposées. Celle de DE SITTER ignore la présence de la matière et suppose sa densité nulle. Elle conduit à certaines difficultés d'interprétation sur lesquelles nous aurons l'occasion de revenir, mais son grand intérêt est d'expliquer la fait que les nébuleuses extra-galactiques semblent nous fuir avec une énorme vitesse, comme une simple conséquence des propriétés du champ de gravitation, sans supposer que nous nous trouvons en un point de l'univers doué de propriétés spéciales.

L'autre solution est celle d'EINSTEIN. Elle tient compte du fait évident que la densité de la matière n'est pas nulle et elle conduit à une relation entre cette densité et le rayon du l'univers. Cette relation a fait prévoir l'existence de masses énormément supérieures à tout ce qui était connu lorsque la théorie a été pour la première fois comparée avec les faits. Ces masses ont été depuis découvertes lorsque les distances et les dimensions des nébuleuses extra-galactiques ont peu être établies. Le rayon de l'univers calculé par la formule d'Einstein est d'après les données récentes quelques centaines de fois plus grand que la distance des objets les plus éloignés photographiés dans nos télescopes ([2] Cf. Hubble E. Extra-galactic nebulae, *Ap. J.*, vol. 64, p. 321, 1926. *M^t Wilson Contr.* N° 324)

Les deux solutions ont donc leurs avantages. L'une s'acorde avec l'observation des vitesses radiales des nébuleuses, l'autre tient compte de la présence de la matière et donne une relation satisfaisante entre le rayon de l'univers et la masse qu'il contient. Il semble désirable d'obtenir une solution intermédiaire qui pourrait combiner les avantages de chacune d'elles.

A première vue, un tel intermédiaire n'existe pas. Un champ de gravitation statique et de symétrie sphérique n'admet que deux solutions, celle d'Einstein et celle de de Sitter, si la matière est uniformément répartie et n'est soumise à aucune pression ou tension intérieure. L'univers de de Sitter est vide, celui d'Einstein a pu être décrit comme contenant autant de matière qu'il en peut contenir ; il est étonnant que la théorie ne puisse fournir un juste milieu entre ces deux extrêmes.

Le paradoxe s'éclaircit lorsqu'on se rend compte que la solution de de Sitter ne répond pas à toutes les nécessités du problème.

([3] Cf. K. LANCZOS. - Bemerkung zur de Sitterschen Welt. *Phys. Zeitschr.*, vol.

lines are closed lines going through the whole space without encountering any boundary.

Two solutions have been proposed. That of de Sitter ignores the existence of matter and supposes its density equal to zero. It leads to special difficulties of interpretation which will be referred to later, but it is of extreme interest as explaining quite naturally the observed receding velocities of extra-galactic nebulæ, as a simple consequence of the properties of the gravitational field without having to suppose that we are at a point of the universe distinguished by special properties.

The other solution is that of Einstein. It pays attention to the evident fact that the density of matter is not zero, and it leads to a relation between this density and the radius of the universe. This relation forecasted the existence of masses enormously greater than any known at the time. These have since been discovered, the distances and dimensions of extra-galactic nebulæ having become known. From Einstein's formulæ and recent observational data, the radius of the universe is found to be some hundred times greater than the most distant objects which can be photographed by our telescopes.

Each theory has its own advantages. One is in agreement with the observed radial velocities of nebulæ, the other with the existence of matter, giving a satisfactory relation between the radius and the mass of the universe. It seems desirable to find an intermediate solution which would combine the advantages of both.

At first sight, such an intermediate solution does not appear to exist. A static gravitational field for a uniform distribution of matter without internal stress has only two solutions, that of Einstein and that of de Sitter. De Sitter's universe is empty, that of Einstein has been described as "containing as much matter as it can contain". It is remarkable that the theory can provide no mean between these two extremes.

The solution of the paradox is that de Sitter's solution does not really meet all the requirements of the problem.

([2] Cf. K. LANCZOS. - Bemerkung zur de Sitterschen Welt. *Phys. Zeitschr.*, vol.

23, p. 539, 1922, et H. WEYL. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Id., vol. 24, p. 230, 1923. Nous suivons ici le point de vue de Lanczos. Les lignes d'univers des nébuleuses forment un gerbe de centre idéal et d'hyperplan axial réel; l'espace normale à ces lignes d'univers est formé par les hypersphères équidistantes au plan axial. Cet espace est elliptique, son rayon variable étant minimum à l'instant correspondant au plan axial. Dans l'hypothèse de Weyl, les lignes d'univers sont parallèles dans le passè ; les hypersurfaces normales représentant l'espace sont des horosphères, la géométrie de l'espace est donc euclidienne. La distance spaciale entre les nébuleuses augmente au fur et à mesure que les géodésiques parallèles qu'elles décrivant s'écartent l'une à l'autre, proportionnellement à $e^{t/R}$, où t est le temp propre et R le rayon de l'univers. L'effet Doppler est égal à r/R, où r est la distance de la source à l'instant de l'observation. Cf. G. LEMAÎTRE. Note on de Sitter's univers. *Journal of mathematics and physics*, vol 4, n° 3, May 1925, ou *Publications du Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain*, vol. 2, p. 37, 1925. Pour la discussion de la partition de de Sitter, voir P. DU VAL: Geometrical note on de Sitter's world. *Phil. Mag.* (6), vol. 47, p. 930, 1924. L'espace est formé d'hyperplans normaux à une droite temporelle décrite par le centre introduit, les trajectoires des nébuleuses sont les trajectoires othogonales de ces plans, elles ne sont généralement plus des géodésiques et elles tendent à devenir des lignes de longueur nulle lorsqu'on s'approche de l'horizon du centre, c'est-à-dire de l'hyperplan polaire de l'axe central par rapport à absolu.)

L'espace y est bien homogène, du courbure positive constante ; l'espace-temps aussi est homogène, tous les points de l'univers sont parfaitement équivalents ; mais la division de l'espace-temps en espace et en temps ne respecte plus l'homogénéité. Les coordonnées choisies introduisent un centre auquel rien ne correspond dans la réalité ; un pont immobile au centre de l'espace décrit une géodésique de l'univers, un point immobile autre part qu'au centre ne décrit pas une géodésique de l'univers. Le choix des coordonnées rompt donc l'homogénéité qui existait dans les données du problème, de la proviennent les résultats paradoxaux qui apparaissent à l' »horizon« du centre. Lorsqu'on introduit des coordonnées et une division correspondante de l'espace et du temps respectant l'homogénéité de l'univers, on trouve que la champ n'est plus statique, on obtient un univers de même forme que celui d'Einstein, mais où la rayon de l'espace au lieu de demeurer invariable varie avec le temps suivant une loi particulière.

([4] Si on se borne à deux dimensions, une d'espace et une de temps, la division d'espace et de temps utilisée par de Sitter peut être représentée sur une sphère : les lignes d'espace sont fournies par un système de grands cercles se coupant sur

23, p. 539, 1922, and H. WEYL. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Id., vol 24, p. 230, 1923. Here we follow the point of view of Lanczos. The world lines of the nebulæ forment un gerbe de centre idéal et d'hyperplan axial réel; l'espace normale à ces lignes d'univers est formé par les hypersphères équidistantes aux plan axial. This space is elliptical, son rayon variable étant minimum à l'instant correspondant au plan axial. Dans l'hypersphère de Weyl, les lignes d'univers sont parallèles dans le passè ; the normal hypersurfaces representing space are horospheres, the geometry of space is therefore Euclidian. The spacial distance between the nebulæ augmante au fur et à mesure que les géodésiques parallèles qu'elles décrivant s'écartent l'une à l'autre, proportionnellement à $e^{t/R}$, where t is the proper time and R is the radius of the universe. The Doppler effect is equal to r/R, where r is the distance of the source at the moment of observation. Cf. G. LEMAÎTRE. Note on de Sitter's univers. *Journal of mathematics and physics*, vol 4, n° 3, May 1925, ou *Publications du Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain*, vol. 2, p. 37, 1925. For a discussion of de Sitter's partition, see P. DU VAL: Geometrical note on de Sitter's world. *Phil. Mag.* (6), vol 47, p. 930, 1924. L'espace est formé d'hyperplans normaux à une droite temporelle décrit par le centre introduit, the trajectories of the nebulæ are trajectories othogonal to these planes, they are not, generally, geodesics et elles tendent à devenir des lignes de longueur nulle lorsqu'on s'approche de l'horizon du centre, c'est-à-dire de l'hyperplan polaire de l'axe central par rapport à absolu.)

Space is homogeneous with constant positive curvature; space-time is also homogeneous, for all events are perfectly equivalent. But the partition of space-time into space and time disturbs the homogeneity. The co-ordinates used introduce a centre. A particle at rest at the centre of space describes a geodesic of the universe; a particle at rest otherwhere than at the centre does not describe a geodesic. The co-ordinates chosen destroy the homogeneity and produce the paradoxical results which appear at the so-called "horizon" of the centre. When we use co-ordinates and a corresponding partition of space and time of such a kind as to preserve the homogeneity of the universe, the field is found to be no longer static; the universe becomes the same form as that of Einstein, with a radius no longer constant but varying with time according to a peculiar law.

([1] If we restrict ourselves to two dimensions, one spacial and one temporal, the distinction between space and time employed by de Sitter can be represented on a sphere : les lignes d'espace sont fournies by a system of great circles which cross un même diamètre et les lignes temporelles sont les parallèles coupant normalement les lignes spaciales. Un de ces parallèles est un grand cercle et donc une géodésique, il correspond au centre de l'espace, le pôle de ce grand cercle est un point singulier correspondant à l'horizon du centre. La représentation doit naturellement être étendue à quatre dimensions et la coordonnée temporelle doit être supposée imaginaire, mais le défaut d'homogénéité reviennent à prendre pour lignes temporelles un système de méridiens et pour lignes spaciales les parallèles correspondants, alors le rayon de l'espace varie avec la temps.)

Pout trouver une solution présentant simultanément les avantages de celle d'Einstein et de celle de de Sitter, nous sommes ainsi conduits à étudier un univers d'Einstein où le rayon de l'espace (ou de l'univers) varie d'une façon quelconque.

2. Univers d'Einstein a rayon variable. Équations du champ de gravitation. Conservation de l'énergie.

Tout comme pour la solution d'Einstein, nous assimilons l'univers à un gaz très raréfié donc les nébuleuses extra-galactiques forment les molécules ; nous les supposons assez nombreuses pour qu'un volume petit par rapport à l'ensemble de l'univers contienne assez de nébuleuses pour que nous puissons parler de la densité de la matière. Nous ignorons l'influence possible de condensations locales. De plus, nous supposons que la répartition des nébuleuses est uniforme et donc que la densité est indépendante de la position.

Pour une variation arbitraire du rayon de l'univers la densité, uniforme dans l'espace, varie avec le temps. De plus, la matière est, en général, soumise à des tensions qui, à cause de l'homogénéité, se réduisent à une simple pression uniforme dans l'espace et variable avec le temps. La pression est égale aux deux tiers de l'énergie cinétique, elle est négligeable vis-à-vis de l'énergie condensée dans la matière, il en est de même des pressions intérieures des nébuleuses ou des étoiles qu'elles contiennent ; nous sommes donc conduits à poser $p = 0$.

Peut-être faudrait-il tenir compte de la pression de radiation de l'énergie rayonnante circulant dans l'espace ; cette énergie est fort faible, mais elle est répartie dans tout l'espace et fournit peut-être une contribution importante à l'énergie moyenne. Nous garderons le terme p dans les équations générales en l'interprétant comme la pression de radiation moyenne de la lumière, main nous poseront $p = 0$, lorsque nous en viendrons à l'application aux phénomènes astronomique.

each other sur un même diamétre and the temporal lines are parallels which cross the spacial lines normally. One of these parallels is a great circle and thus a geodesic, it corresponds to the centre of space, the pole of the great circle is a singular point corresponding to à l'horizon du centre. This representation can be extended in a natural way to four dimensions and the time coordinate should be thought of as imaginary, mais le défaut d'homogénéité reviennent à prendre pour lignes temporelles un système de méridiens et pour lignes spaciales les parallèles correspondants, and so the radius of the universe varies with time.)

In order to find a solution combining the advantages of those of Einstein and de Sitter, we are led to consider an Einstein universe where the radius of space or of the universe is allowed to vary in an arbitrary way.

2. *Einstein Universe of Variable Radius. Field Equations. Conservation of Energy.*

As in Einstein's solution, we liken the universe to a rarefied gas whose molecules are the extra-galactic nebulæ. We suppose them so numerous that a volume small in comparison with the universe as a whole contains enough nebulæ to allow us to speak of the density of matter. We ignore the possible influence of local condensations. Furthermore, we suppose that the nebulæ are uniformly distributed so that the density does not depend on position.

When the radius of the universe varies in an arbitrary way, the density, uniform in space, varies with time. Furthermore, there are generally interior stresses, which, in order to preserve the homogeneity, must reduce to a simple pressure, uniform in space and variable with time. The pressure, being two-thirds of the kinetic energy of the "molecules", is negligible with respect to the energy associated with matter; the same can be said of interior stresses in nebulæ or in stars belonging to them. We are thus led to put $p = 0$.

Nevertheless it might be necessary to take into account the radiation-pressure of electromagnetic energy travelling through space; this energy is weak but it is evenly distributed through the whole of space and might afford a notable contribution to the mean energy. We shall thus keep the pressure p in the general equations as the mean radiation-pressure of light, but we shall write $p = 0$ when we discuss the application to astronomy.

Nous désignon par ρ la densité de l'énergie totale, la densité de l'énergie rayonnante sera $3p$ et la densité de l'énergie concentrée dans la matière est $\delta = \rho - 3p$.

Il faut identifier ρ et $-p$ avec les composantes T_4^4 et $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ du tenseur d'énergie matérielle et δ avec T. Calculons les composantes du tenseur de Riemann contracté pour un univers d'intervalle

We denote the density of total energy by ρ, the density of radiation energy by $3p$, and the density of energy condensed in matter by $\delta = \rho - 3p$.

We identify ρ and $-p$ with the components T_4^4 and $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ of the material energy tensor, and δ with T. Working out the contracted Riemann tensor for a universe with a line element given by

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2 \qquad (1)$$

dσ est l'élément de longueur d'un espace de rayon égal à un; le rayon R de l'espace est une fonction du temps. Les équations du champ de gravitation s'écrivent

where dσ is the elementary distance in a space of radius unity, and R is a function of the time t, we find that the field equations can be written

$$3\frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \qquad (2)$$

et

and

$$2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \kappa p \qquad (3)$$

Les accent désignent des dérivées par rapport à t ; λ et la constante cosmologique dont la valeur est inconnu et κ la constante d'Einstein égale à $1.87\cdot10^{-27}$ en unités C.G.S. (8π en unités naturelles).

Les quatre identités exprimant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie se réduisent ici à

Accents denote derivatives with respect to t. λ is the unknown cosmological constant, and κ is the Einstein constant whose value is $1.87\cdot10^{-27}$ in C.G.S. units (8π in natural units).

The four identities giving the expression of the conservation of momentum and of energy reduce to

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3R'}{R}(\rho + p) = 0 \qquad (4)$$

qui exprime la conservation de l'énergie. Cette équation peut donc remplacer (3). Elle est susceptible d'une interprétation intéressante. Introduisant le volume de l'espace $V = \pi^2 R^3$, elle peut s'écrire

which is the energy equation. This equation can replace (3). As $V = \pi^2 R^3$ it can be written

$$d(V\rho) + p\,dV = 0 \qquad (5)$$

et elle exprime que *la variation de l'énergie totale plus le travail effectué par la pression de radiation est égale à zéro*.

showing that *the variation of total energy plus the work done by radiation-pressure in the dilatation of the universe is equal to zero*.

3. Cas où la masse totale de l'univers demeure constante

Cherchons une solution pour laquelle la masse totale $M = V\delta$ demeure constante. Nous pourrons alors poser

3. *Universe of Constant Mass.*

If $M = V\delta$ remains constant, we write, α being a constant,

$$\kappa\delta = \frac{\alpha}{R}$$

$$\kappa\delta = \frac{\alpha}{R^3} \qquad (6)$$

où α est une constante. Tenant compte de la relation

As

$$\rho = \delta + 3p$$

existant entre les diverses sortes d'énergie, le principe de conservation de l'énergie devient

we have

$$3\,\mathrm{d}(pR^3) + 3p\,R^2\,\mathrm{d}R = 0 \qquad (7)$$

dont l'intégration est immédiate ; β désignant une constante d'intégration, nous avons

and, β being a constant of integration,

$$\kappa p = \frac{\beta}{R^4} \qquad (8)$$

et donc

and therefore

$$\kappa\rho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4} \qquad (9)$$

Substituant dans (2), nous avons à intégrer

By substituting in (2) we have

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4} \qquad (10)$$

ou

and

$$t = \int \frac{\mathrm{d}R}{\sqrt{\frac{\lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}} \qquad (11)$$

Pour α et β égaux à zéro, nous trouvons la solution de de Sitter ([5] Cf. Lanczos, *loc. cit.*))

When α and β vanish, we obtain the de Sitter solution in Lanczos's form

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\cosh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}(t - t_0)\right) \qquad (12)$$

La solution d'Einstein s'obtient en posant β = 0 et R constant. Posant $R' = R'' = 0$ dans (2) et (3), il vient

$$\frac{1}{R^2} = \lambda \qquad \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \qquad \rho =$$

The Einstein solution is found by making β = 0 and R constant. Writing Writing $R' = R'' = 0$ in (2) and (3) we find

$$\frac{1}{R^2} = \lambda \qquad \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \qquad \rho = \delta$$

donc

or

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad \kappa\delta = \frac{2}{R^2} \tag{13}$$

et d'après (6)

and from (6)

$$\alpha = \kappa\delta R^3 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \tag{14}$$

La solution d'Einstein ne résulte pas de la seule relation (14), il faut en outre que la valeur initiale de R' soit nulle. En effet, écrivant pour simplifier les écritures

The Einstein solution does not result from (14) alone; it also supposes that the initial value of R' is zero. If we write

$$\lambda = \frac{1}{R_0^2} \tag{15}$$

et posant dans (11) $\beta = 0$ et $\alpha = 2R_0$, il vient

we have for $\beta = 0$ and $\alpha = 2R_0$

$$t = R_0\sqrt{3} \int \frac{dR}{R - R_0} \cdot \sqrt{\frac{R}{R + 2R_0}} \tag{16}$$

Pour cette solution les deux équation (13) ne seront naturellement plus vérifiées. Si nous écrivons

For this solution the two equations (13) are of course no longer valid. Writing

$$\kappa\delta = \frac{2}{R_E^2} \tag{17}$$

nous aurons d'après (14) et (15)

we have from (14) and (15)

$$R^3 = R_E^2 R_0 \tag{18}$$

La valeur de R_E, rayon de l'univers déduit de la densité moyenne par la formule d'Einstein (17), a été estimée par Hubble à

The value of R_E, the radius of the universe computed from the mean density by Einstein's equation (17), has been found by Hubble to be

$$R_E = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ cm } = 2.7 \cdot 10^{10} \text{ parsecs.} \tag{19}$$

Nous alons voir que la valeur de R_0 peut se déduire de la vitesse radiale des nébuleuses ; R pourra alors être calculé par la formule (18). Nous montrerons ensuite qu'une solution introduisant une relation sensiblement différente de (14) conduirait à des conséquences difficilement admissibles.

We shall see later that the value of R_0 can be computed from the radial velocities of the nebulæ; R can be found from (18). Finally, we shall show that a serious departure from (14) would lead to consequences not easily acceptable.

4. Effect Doppler dû a la variation du rayon de l'univers.

D'apres la forme (1) de l'intervalle d'univers, l'équation d'un rayon lumineux est

4. *Doppler Effect due to the Variation of the Radius of the Universe.*

From (1) we have for a ray of light

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}t}{R} \qquad (20)$$

où σ_1 et σ_2 sont les valeurs d'une coordonnée caractérisant la position dans l'espace. Nous pouvons parler du point σ_2 où nous supposerons localisé l'observateur et du point σ_1 où se trouve la source de lumière.

Un rayon émis un peu plus tard partira de σ_1 au temps $t_1 + \delta t_1$ et arrivera en σ_2 au temps $t_2 + \delta t_2$. Nous auront donc

where σ_1 et σ_2 relate to special co-ordinates. We suppose that the light is emitted at the point σ_1 and observed at σ_2.

A ray of light emitted slightly later starts from σ_1 at time $t_1 + \delta t_1$ and reaches σ_2 at time $t_2 + \delta t_2$. We have therefore

$$\frac{\delta t_2}{R_2} - \frac{\delta t_1}{R_1} = 0, \quad \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \qquad (21)$$

où R_1 et R_2 désignent respectivement les valeurs de R aux temps t_1 et t_2. t et le temps propre ; si δt_1 est la période de la lumière émise, δt_2 est la période de la lumière reçue et δt_1 peut encore être considéré comme la période d'une lumière émise dans les mêmes condition dans le voisinage de l'observateur. En effet, la période de la lumière émise dans des condition physiques semblables doit être partout la même lorsqu'elle est exprimée en temps propre.

where R_1 and R_2 are the values of the radius R at the time of emission t_1 and at the time of observation t_2. If δt_1 is the period of the emitted light, δt_2 is the period of the observed light. Now δt_1 is also the period of light emitted under the same conditions in the neighbourhood of the observer, because the period of light emitted under the same physical conditions has the same value everywhere when reckoned in proper time. Therefore

$$\frac{v}{c} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \qquad (22)$$

mesure donc l'effet Doppler apparent dû à la variation du rayon de l'univers. *Il est égal à l'excès sur l'unité du rapport des rayons de l'univers à l'instant où la lumière est reçue et à l'instant où elle est émise.* v est la vitesse de l'observateur qui produirait le même effet. Lorsque la source est suffisamment proche nous pouvons écrire approximativement

is the apparent Doppler effect due to the variation of the radius of the universe. *It equals the ratio of the radii of the universe at the instants of observation and emission, diminished by unity.* v is that velocity of the observer which would produce the same effect. When the light source is near enough, we have the approximate formulæ

$$\frac{v}{c} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{R'}{R}\mathrm{d}t = \frac{R'}{R} r$$

où r est la distance de la source. Nous avons donc

where r is the distance of the source. We have therefore

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{cr} \qquad (23)$$

Les vitesses radiales de 43 nébuleuses extra-galactiques sont donnée par Strömberg ([6] Analysis of radial velocities of globular clusters and non galactic nebulae. *Astrophysical Journal*, Vol. 61, p. 353, 1925. *M^t Wilson Contr.* N° 292).

La grandeur apparente m de ces nébuleuses se trouve dans le travail de Hubble. Il est possible d'en déduire leurs distance, car Hubble

The radial velocities of 43 extra-galactic nebulæ have been given by Strömberg ([6] Analysis of radial velocities of globular clusters and non galactic nebulae. *Astrophysical Journal*, Vol. 61, p. 353, 1925. *M^t Wilson Contr.* N° 292).

The apparent magnitude m of these nebulæ can be found in the work of Hubble. It is possible to infer their distances, because Hubble a montré que les nébuleuses extra-galactiques sont des grandeurs absolues sensiblement égales (grandeur −15.2 à 10 parsecs, les écarts individuel pouvant atteindre deux grandeurs en plus ou en moins), la distance r exprimée en parsecs est alors donnée par la formule $\log r = 0.2m + 4.04$.

On trouve une distance de l'ordre de 10^6 parsecs, variant de quelques dixièmes à 3.3 million de parsecs. L'erreur probable résultant de la dispersion en grandeur absolue est d'ailleurs considérable. Pour une différence de grandeur absolue de deux grandeurs en plus ou en moins, la distance passe de 0.4 à 2.5 fois la distance calculée. De plus, l'erreur à craindre est proportionnelle à la distance. On peut admettre que pour une distance d'un million de parsec, l'erreur résultant de la dispersion en grandeur est du même ordre que celle résultant de la dispersion en vitesse. En effet, une différence d'éclat d'une grandeur correspond à une vitesse propre de 300 km égale à la vitesse propre du soleil par rapport aux nébuleuses. On peut espérer éviter une erreur systématique en donnant aux observations un poid proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, où r est la distance en millions de parsecs.

Utilisant les 42 nébuleuses figurant dans les listes du Hubble et de Strömberg ([7] Il n'est pas tenu compte de N.G.C. 5194 qui est associé à N.G.C. 5195. L'introduction des nuées de Magellan serait sans influence sur le résultat.), et tenant compte de la vitesse propre du soleil (300 km dans la direction $\alpha = 315°$, $\delta = 62°$), on trouve une distance moyenne de 0.95 millions de parsecs et une vitesse radiale de 600 km/sec, soit 625 km/sec à 10^6 parsecs. ([8] En ne donnant pas de poids aux observations, on trouverait 670 km/sec à $1.16{\cdot}10^6$ parsecs, 575 km/sec à 10^6 parsecs. Certains auteurs ont cherché à mettre en évidence la relation entre v et r et n'ont obtenu qu'une tres faible corrélation entre ces deux grandeurs. L'erreur dans la détermination des distance individuelles est du même ordre de grandeur que l'intervalle que couvrent les observations et la vitesse propre des nébuleuses (en toute direction) est grande (300 km/sec d'apres Strömberg), il semble donc que ces résultats négatifs ne sont ni pour ni contre l'interpretation relativistique de l'effet Doppler. Tous ce que l'imprécision des obervations permet de faire est de supposer v proportionnel à r et d'essayer d'éviter une erreur systématique dans la déterminasion du rapport v/r. Cf. LUNDMARK. The determination of the curvatute of space time in de Sitter's world. Monthly Notices, vol. 84, p. 747, 1924, et STRÖMBERG, loc. cit.)

Nous adopterons donc

has shown that the absolute magnitudes of the extra-galactic nebulæ are sensibly the same (magnitude −15.2 at 10 parsecs, with individual deviations of plus or minus two magnitudes), so the distance r expressed in parsecs is therefore given by the formula $\log r = 0.2m + 4.04$.

A distance of the order of 10^6 parsecs is found, varying from a few tenths to 3.3 million parsecs. The probable error resulting from the dispersion in absolute magnitude is therefore considerable. For a difference of absolute magnitude of two magnitudes more or less, the distance ranges from 0.4 to 2.5 times the calculated distance. Moreover, the expected error is proportional to the distance. It must be admitted that for a distance of one million parsecs, the error resulting from the dispersion in magnitude is the same as that resulting from the velocity dispersion. Indeed, a brightness difference of one magnitude corresponds to an inherent velocity of 300 km/s equal to the inherent velocity of the sun relative to the system of nebulæ. One can hope to avoid a bias by giving the observations a weight proportional to $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, where r is the distance in millions of parsecs.

Utilizing the 42 nebulæ given in the lists of Hubble and Strömberg ([1] Il n'est pas tenu compte de N.G.C. 5194 which is associated with N.G.C. 5195. Adding the Magellanic Clouds had no influence on the result.), and taking into account the inherent velocity of the sun (300 km/sec in the direction RA = 315°, Decl. = 62°), a mean distance 0f 0.95 million parsecs and a radial velocity of 600 km/sec, i.e. 625 km/sec at 10^6 parsecs. ([2] Assigning no weights to the observations, one finds 670 km/sec at $1.16{\cdot}10^6$ parsecs, i.e. 575 km/sec at 10^6 parsecs. Some authors have sought a relationship between v and r and have only obtained a very weak correlation between these two quantities. The error in the determination of the individual distances is of the same order of magnitude as the interval covered by the observations and the individual velocities of the nebulæ (in any direction)is large (300 km/sec according to Strömberg). Therefore it seems that these negative results are neither evidence for or against the relativistic interpretation of the Doppler effect. The lack of precission of the observations only allows the supposition that v is proportional to r, trying to avoid a systematic error in the determination of the ratio v/r. Cf. LUNDMARK. The determination of the curvatute of space time in de Sitter's world. Monthly Notices, vol. 84, p. 474, 1924, et STRÖMBERG, loc. cit.)

From a discussion of available data, we adopt

$$\frac{R'}{R}=\frac{v}{rc}=\frac{625\cdot 10^5}{10^6\cdot 3.08\cdot 10^{18}\cdot 3\cdot 10^{10}}=0.68\cdot 10^{-27}\ \text{cm}^{-1} \qquad (24)$$

Cette relation nous permet de calculer R_0. Nous avon en effet par (16)

$$\frac{R'}{R}=0.68\cdot 10^{-27}\ \text{cm}^{-1} \qquad (24)$$

and find from (16)

$$\frac{R'}{R}=\frac{1}{R_0\sqrt{3}}\sqrt{1-3y^2+2y^3} \qquad (25)$$

où nous avons posé | where

$$y=\frac{R_0}{R} \qquad (26)$$

D'autre part, d'après (18) et (26), | Now from (18) and (26)

$$R_0^2=R_E^2 y^3 \qquad (27)$$

et donc | and therefore

$$3\left(\frac{R'}{R}\right)^2 R_E^2=\frac{1-3y^2+2y^3}{y^3} \qquad (28)$$

Introduisant les valeurs numériques de $\frac{R'}{R}$ (24) et de R_E (19), il vient :

With the adopted numerical data (24) and (19), we have

$$y = 0.0465$$

On a alors : | giving

$$R=R_E\sqrt{y}=0.215R_E=1.83\cdot 10^{28}\ \text{cm}=6\cdot 10^9\ \text{parsecs}$$

$$R_0=Ry=R_E y^{3/2}=8.5\cdot 10^{26}\ \text{cm}=2.7\cdot 10^8\ \text{parsecs}=9\cdot 10^8\ \text{années de lumière/light-years.}$$

L'integrale (16) se calcule facilement. Posant

Integral (16) can easily be computed. Writing

$$x^2=\frac{R}{R+2R_0} \qquad (29)$$

elle s'écrit | it can be written

$$t=R_0\sqrt{3}\int\frac{4x^2\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)(3x^2-1)}=R_0\sqrt{3}\cdot\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+R_0\log\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x-1}{\sqrt{3}\cdot x+1}\right)+C \qquad (30)$$

Si nous désignons par σ la fraction du rayon de l'univers parcourue par la lumière au temp t, nous avons aussi par (20) :

If σ is the fraction of the radius of the universe travelled by light during time t, we have also

$$\sigma=\int\frac{\mathrm{d}t}{R}=\sqrt{3}\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{3x^2-1}=\log\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x-1}{\sqrt{3}\cdot x+1}\right)+C' \qquad (31)$$

Nous donnons ci-dessous une table de σ et t en fonction de $\frac{R}{R_0}$

The following table gives values of σ and t for different values of R/R_0:

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{t}{R_0}$	σ		$\frac{v}{c}$
		Radians	Degrés/ Degrees	
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	19
2	–4.31	–0.889	–51°	9
3	–3.42	–0.521	–30°	$5\frac{2}{3}$
4	–2.86	–0.359	–21°	4
5	–2.45	–0.266	–15°	3
10	–1.21	–0.087	–5°	1
15	–0.50	–0.029	–1.7°	$\frac{1}{3}$
20	0.00	0.000	0	0
25	0.39	0.017	1°	
∞	∞	0.087	5°	

Les constantes d'integration sont choisies de telle sorte que σ et t soient nuls pour $\frac{R}{R_0} = 20$ au lieu de 21.5. La dernère colonne donne l'effet Doppler calculé par la formule (22). D'après la formule approchée (23) $\frac{v}{c}$ serait proportionnel à r et donc à σ. L'erreur commise en adoptant cette équation n'est que de cinq millièmes pour $\frac{v}{c} = 1$. Elle peut donc être employée tant que le spectre reste visible.

The constants of integration are adjusted to make σ and t vanish for $R/R_0 = 20$ in place of 21.5. The last column gives the Doppler effect computed from (22). The approximate formula (23) would make v/c proportional to r and thus to σ. The error is only 0.005 for $v/c = 1$. The approximate formula may therefore be used within the limits of the visible spectrum.

5. Significance de la relation (14).

Nous avons introduit la relation (14) ente les constantes α et λ d'après la solution d'Einstein. Cette relation est la condition pour que l'expression sous le radical du dénominateur de l'integrale (11) admette une racine double R_0 donnant par intégration un terme logaritmique. Pour des racines simples, on obtiendrait par intégration une racine carrée et la

5. *The Meaning of Equation* (14).

The relation (14) between the two constants λ and α has been adopted following Einstein's solution. It is the necessary condition that the quartic under the radical in (11) may have a double root R_0 giving on integration a logarithmic term. For simple roots, integration would give a square root, corresponding to a minimum of R as in de Sitter's solution valeur de R correspondante serait un minimum comme dans la solution (12) de de Sitter. Ce minimum se produirait généralement à une époque de l'ordre de R_0, soit 10^9 années, c'est-à-dire à une époque récente à l'échelle de l'évolution stellaire. Il semble donc que la relation existant entre les constantes α et λ doit être voisine de (14) pour laquelle ce minimum est rejeté à l'épeque moins l'infini ([9] Si les racines positives devenaient imaginaires, le rayon varierait à partir se zéro, la variation étant ralantie au voisinage du module des racines imaginaires. Pour une relation sensiblement différente de (14), ce ralentissement serait faible et la durée de l'évolution à partir de $R = 0$ serait encore de l'ordre de R_0.).

(12). This minimum would generally occur at time of the order of R_0, say 10^9 years - *i.e.* quite recently for stellar evolution. If the positive roots were to become imaginary, the radius would vary from zero upwards, the variation slowing down in the neighbourhood of the modulus of the imaginary roots. In both cases the time of variation of R in the same sense would be of the order of R_0 if the relation between λ and α were seriously different from (14).

6. Conclusion.

Nous avons obtenu une solution qui vérifie les conditions suivantes :

1. La masse de l'univers est constante et est liée à la constante cosmologique par la relation d'Einstein

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi^2}{\kappa M} = \frac{1}{R_0}$$

2. Le rayon de l'univers croît sans cesse depuis une valeur asymptotique R_0 pour $t = -\infty$.
3. L'éloignement des nébuleuses extra-galactique est un effet cosmique dû à l'expansion de l'espace et permettant de calculer le rayon R_0 par les formules (24) et (25) ou approximativement par

$$R_0 = \frac{rc}{v\sqrt{3}}$$

4. Le rayon du l'univers est du même ordre de grandeur que le rayon R_E déduit de la densité par la formule d'Einstein. On a

$$R = R_E \sqrt[3]{\frac{R_0}{R_E}} = \frac{1}{5} R_E$$

Cette solution concilie les avantages de celles de de Sitter de d'Einstein.

Remarquons que la plus grande partie de l'univers est à jamais hors de notre atteinte. La portée du grand télescope du Mont Wilson est estimée par Hubble à $5 \cdot 10^7$ parsecs soit $\frac{1}{120} R$, l'effect Doppler correspondant est déjà de 3000 km/sec. Pour une distance de 0.087 R, il est égal à un, toute la lumière visible est rejetée dans l'infra-rouge. Il est

6. *Conclusion.*

We have found a solution such that

(1°) The mass of the universe is a constant related to the cosmological constant by Einstein's relation

(2°) The radius of the universe increases without limit from an asymptotic value R_0 for $t = -\infty$.

(3°) The receding velocities of extragalactic nebulæ are a cosmical effect of the expansion of the universe. The initial radius R_0 can be computed by formulæ (24) and (25) or by the approximate formula

(4°) The radius of the universe is of the same order of magnitude as the radius R_E deduced from the density by Einstein's formula. We have

$$R = R_E \sqrt[3]{\frac{R_0}{R_E}} = \frac{1}{5} R_E$$

This solution combines the advantages of the Einstein and de Sitter solutions.

Note that the largest part of the universe is for ever out of our reach. The range of the 100-inch Mount Wilson telescope is estimated by Hubble to be $5 \cdot 10^7$ parsecs, or abount $R/200$. The corresponding Doppler effect is 3000 km/sec. For a distance of 0.087 R it is equal to unity, and the whole visible spectrum is displaced into the infra-red. It is imposible que se forment des images fantômes des nébuleuses ou des soleis parce que, si même aucune absorption ne se produisait, ces images seraient rejetées de plusieurs octaves dans l'infra-rouge et ne pourraient être observées.

Il resterait à se rendre compte de la cause de l'éxpansion du l'univers. Nous avons vu que la pression de radiation travaille lors de l'expansion. Ceci semble suggérer que cette expansion a été produite par la radiation elle-même. Dans un univers statique la lumière émise par la matière parcour l'espace fermé, revient à son point de départ et s'accumule sans cese. Il semble que là doit être cherchée l'origine de la vitesse d'expansion R'/R qu'Einstein supposait nulle et qui dans notre interprétation est observée comme vitesse radiale des nébuleuses extragalactique.

impossible to see ghost-images of nebulæ or suns, as even if there were no absorption these images would be displaced by several octaves into the infra-red and would not be observed.

It remains to find the cause of the expansion of the universe. We have seen that the pressure of radiation does work during the expansion. This seems to suggest that the expansion has been set up by the radiation itself. In a static universe light emitted by matter travels round space, comes back to its starting point, and accumulates indefinitely. It seems that this may be the origin of the velocity of expansion R'/R which Einstein assumed to be zero and which in our interpretation is observed as the radial velocity of extra-galactic nebulæ.

REFERENCES.

(1)	For the different partitions of space and time in the de Sitter universe, see K. LANCZOS, *Phys. Zeits*., **23**, 539, 1922 H. WEYL, *Phys. Zeits.*, **24**, 230, 1923. P. DU VAL, *Phil. Mag*., 6, **47**, 930, 1924 G. LEMAÎTRE, *Journal of Math. and Phys.*, **4**, No. 3, May 1925.
(2)	Equations of the universe of variable radius and constant mass have been fully discussed, without reference to the receding velocity of nebulæ, by A. FRIEDMANN, "Über die Krümmung des Raümes [sic!]", *Z. f. Phys.*, **10**, 377, 1922; see also A. EINSTEIN, *Z. f. Phys.*, **11**, 326, 1922, and **16**, 228, 1923. The universe of variable radius has been independently studied by R. C. TOLMAN, *P.N.A.S.*, **16**, 320, 1930
(3)	Discussion of the theory, and recent developments are found in A. S. EDDINGTON, *M.N.*, **90**, 668, 1930. W. DE SITTER, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **16**, 474, 1930, and *B.A.N.*, **5**, No. 185, 193, and 200 (1930). G. LEMAÎTRE, *B.A.N.*, **5**, No. 200, 1930.
(4)	Popular expositions have been given by G. LEMAÎTRE, "La grandeur de l'espace", *Revue des questions scientifiques*, March 1929.

	W. de Sitter, "The Expanding Universe", *Scientia*, Jan. 1931.